EXERCICE N°1 : 35' 5 points

L'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(0,1,1)$; $I(-1,0,2)$ et le vecteur $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$. Soit le plan $Q: 2y-z-3=0$.

1°) a) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I, de rayon $\sqrt{5}$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

c) Montrer que D coupe la sphère S en deux points dont l'un est $B(1,0,1)$

2°) a) Soit P le plan tangent à S en B. Montrer qu'une équation cartésienne de $P: -2x+z+1=0$

b) Montrer que Q est tangent à S en un point C que l'on déterminera.

3°) a) Montrer que P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap Q$

b) Montrer que Δ et incluse dans le plan R, médiateur du segment $[BC]$

4°) Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de ξ tel que :

$$x^2+y^2+z^2+2(m+1)x+2(m-2)z+m=0 \ ; \ m\in IR .$$

a) Montrer que, pour tout $m\in IR$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Quel est l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR.

c) Etudier suivant m, la nature de $P\cap S_m$.

EXERCICE N°2 : 35' 6 points

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient les points $A(0,0,1)$, $I(-2,-1,-1)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha+2 \\ z=-2\alpha-1 \end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

1°) a) Donner l'équation de la sphère S de centre I et passant par A.

b) Montrer que la droite Δ coupe S en deux points B et C dont on précisera les coordonnées.

c) Déterminer l'équation cartésienne du plan P médiateur du segment $[BC]$.

2°) m étant un paramètre réel. On considère le plan $Q_m: (m+2)x+y+mz-4+m=0$.

a) Trouver m vérifiant $Q_m \perp P$.

b) Discuter, suivant les valeurs de m, l'intersection de Δ et Q_m. Peut-on avoir $\Delta \perp Q_m$?

b) Montrer que (OD) coupe Q en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

3°) Soit S la sphère de centre Ω et rayon $3\sqrt{3}$.

a) Ecrire une équation cartésienne de S.

b) Vérifier que S passe par A, B, C et D.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

L'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(0,1,2)$; $B(1,2,0)$ et $C(2,0,1)$.

1°) a) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan P et qu'une équation cartésienne de $P : x+y+z-3=0$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et tangente à P et trouver les coordonnées du point de contact H.

2°) Soit $m \in IR$ et les points $E(m,\sqrt{3},-m)$; $F(m,-\sqrt{3},-m)$.

On désigne par S_m l'ensemble des points M de l'espace tel que $ME^2+\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EF}=0$.

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère de diamètre $[EF]$.

b) Soit I_m le centre de S_m. Montrer que l'ensemble des points I_m est une droite Δ parallèle à P.

c) Montrer que pour $m \in IR$, S_m est tangente à P.

3°) Soit J_m le point de contact de S_m et P. Déterminer m pour que la distance $J_m J_{-m}=4\sqrt{2}$.

EXERCICE N°4 : 40' 6 points

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(0,0,3)$ $B(1,-1,0)$ et le plan P dont une équation est : $x+y-z=0$.

1°) Soit Q le plan passant par A et B et perpendiculaire à P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $2x-y+z-3=0$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite $D=P\cap Q$.

2°) Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+3m=0 \quad (m \in IR).$$

a) Déterminer suivant les valeurs de m, la nature et les éléments caractéristique de S_m.

b) Montrer que le plan P coupe $S_{\frac{3}{2}}$ en un cercle (C) dont on précisera le rayon r et le centre H.

3°) Soit le point $M(2,1,\cos t)$ avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par $d_1=d(M,P)$; $d_2=d(M,Q)$ et $d=d(M,D)$.

a) Calculer en fonction de t, d_1 et d_2.

b) En déduire que : $d^2=\dfrac{\cos^2 t-4\cos t+6}{2}$.

c) Déterminer la valeur de t pour laquelle la distance d est minimale.

d) Montrer que la droite D est une tangente à (C).